

Estabilización global de mini naves aéreas tipo VTOL

R. Cruz-José¹, J. F. Guerrero-Castellanos², W. F. Guerrero-Sánchez¹, J. J. Oliveros-Oliveros¹.

¹ Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas-BUAP, ² Facultad de Ciencias de la Electrónica-BUAP.

Av. San Claudio y 18 sur, Col. San Manuel, C. P. 72570, Puebla, Pue., México.

rcruz@alumnos.fcfm.buap.mx, fguerrero@ece.buap.mx

Resumen—El presente trabajo propone una solución simple para la estabilización de la posición de mini y micro vehículos aéreos bajo la configuración VTOL. Esta solución explota la característica que tienen los sistemas VTOL al modelarse como un sistema en cascada; la dinámica de traslación depende de la dinámica de rotación, pero lo inverso no sucede. Entonces, un procedimiento constructivo multi-etapas es llevado a cabo dando como resultado un conjunto de leyes de control no lineales acopladas. Una primer ley de control se encarga de mantener al vehículo en una posición y velocidad angular determinada y utiliza al cuaternión como parametrización de la orientación. Una vez cumplido esto y mediante el diseño de un control de empuje (sustentación) adecuado, la dinámica de traslación se convierte en tres, independientes, cadenas de integradores de orden dos, correspondientes a las coordenadas x, y, z . La estabilización al origen de las tres cadenas de integradores se realiza mediante un control no lineal, que consiste en la suma de funciones de saturación. El algoritmo de control resultante es suficientemente simple para ser implementado en sistemas embebidos con capacidades de cálculo reducidas. Simulaciones del sistema en lazo cerrado muestran la efectividad del algoritmo propuesto.

Palabras clave: Control no lineal, funciones de saturación, inner-outer loop, mini UAV's VTOL, control de mini helicópteros.

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de vehículos aéreos se ha convertido en los últimos tiempos en una necesidad estratégica de varios países del mundo, en particular las naves aéreas no tripuladas (UAV's por las siglas en inglés de Unmanned Aerial Vehicle) debido a su relativo bajo costo, al interés que generan sus aplicaciones militares y al progreso tecnológico en el área de los microprocesadores, sensores, actuadores y dispositivos de almacenamiento de energía. Además de esto también han despertado gran interés por su investigación en universidades y centros de investigación por las posibilidades de sus aplicaciones civiles, estas abarcan un gran espectro y encontramos la supervisión de territorios, líneas de alta tensión, tráfico vehicular, infraestructuras civiles de difícil acceso, acciones de desastre y protección civil, prevención y combate de delitos, etc.

Gran parte de la investigación que se realiza en robótica aérea está centrada en vehículos de ala rotatoria; helicópteros y arquitecturas con capacidad de despegue y aterrizaje vertical VTOL (del inglés Vertical Take-Off and

Landing). Esto es debido a la capacidad de estos vehículos para realizar vuelos estacionarios, así como la gran movilidad, características importantes y necesarias en una gran cantidad de aplicaciones. En este tipo de sistemas los torques de control $\Gamma_{1,2,3}$, aplicados alrededor de los ejes principales del marco de referencia fijo al cuerpo (ver Figura 1), permiten la estabilización de la orientación del vehículo. Adicionalmente se tiene una fuerza u en la dirección del eje z del marco de referencia fijo al cuerpo y es la fuerza de sustentación necesaria para realizar despegues y aterrizajes de forma vertical, así como los vuelos estacionarios. En estos sistemas el desplazamiento horizontal se realiza manipulando los torques de control $\Gamma_{1,2,3}$ de tal manera que se logre inclinar el vehículo un cierto ángulo en la dirección de desplazamiento deseada, lo cual no siempre es una tarea fácil (Salazar et al., 2009), aquí la importancia de un control de orientación efectivo. El modelo más emblemático en las arquitecturas VTOL es el helicóptero con cuatro rotores, que ha dado origen a trabajos muy importantes, por ejemplo (Castillo et al., 2004), (Hably y Marchand, 2007), (Guerrero et al., 2008), (Pounds y Mahony, 2009), (Dierks y Jagannathan, 2010), (Guerrero et al., 2011), (Zamudio et al., 2011), (Fernando et al., 2011).

La estrategia de control presentada en este trabajo, permite la estabilización completa del vehículo aéreo VTOL (orientación y traslación). Esta aeronave se puede expresar como un sistema en cascada, entonces el diseño de la ley de control se realizó utilizando un enfoque jerárquico lazo interno- lazo externo (inner-outer loop). Con este esquema, el lazo interno permite controlar la orientación mientras que el externo controla la posición. Estos dos lazos de control se relacionan por señales de control intermedias. El control de orientación se realiza mediante una propuesta que combina el resultado de la ley de control propuesta en (Guerrero et al., 2008) y una parte de la propuesta en (Cordova et al., 2008). Para el control de posición se realiza una adecuada transformación de coordenadas. Entonces, inspirados en los trabajos de (Teel, 1992), (Sussmann et al., 1994) y (Marchand y Hably, 2005) se proponen tres leyes de control basadas en la suma de saturaciones con garantía de polos reales diferentes de uno. La estrategia de control propuesta es extremadamente simple, de forma que ella puede ser fácilmente implementada en algún pequeño microprocesador como los que generalmente son utilizados

en este tipo de mini vehículos.

El contenido de este trabajo es organizado de la siguiente manera. La sección II está dedicada al planteamiento de algunos resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo a manera de antecedentes matemáticos. En la sección III se presenta el modelo matemático de los sistemas VTOL considerados para este análisis. En la sección IV se define el problema a tratar. La sección V está dedicada a la presentación del control de orientación y se muestra el diseño de la ley de control de traslación propuesta. En la sección VI se muestran los resultados obtenidos. Finalmente, en la sección VII se enuncian algunas conclusiones.

II. ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

II-A. Estabilización de una cadena de integradores

Una cadena de integradores está definida por:

$$\dot{x} = Ax + B\bar{u} \quad (1)$$

donde A es tal que $a_{ij} = 1$ si $j = i + 1$ y $a_{ij} = 0$ en otro caso, B es tal que $b_i = 0$ para $i = 1, \dots, n - 1$ y $b_n = 1$, n es la dimensión del sistema.

Teorema 1: Considere la cadena de integradores descrita en (1). Sean a_i los polos del sistema tales que $0 < a_j < \bar{a}$, y definiendo

$$a_j = \frac{a_1}{(\eta + 1)^{j-1}}, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

donde $\eta \geq 1$. Entonces, para cualquier condición inicial, el control \bar{u} definido por

$$\bar{u} = -\sigma \sum_{i=1}^n a_{n-i+1} \text{sat}_1(y_i), \quad (3)$$

estabiliza global y asintóticamente a (1).

Donde σ está definida por

$$\sigma := \frac{\tilde{u}}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad (4)$$

donde \tilde{u} es un número real que determinará la máxima amplitud del control. Una función de saturación se define como

$$\text{sat}_{M_j}(\cdot) := \min(M_j, \max(-M_j, \cdot)). \quad (5)$$

Y finalmente, los estados y_i se calculan mediante la transformación lineal

$$y := \frac{1}{\sigma} Tx \quad (6)$$

sobre x , donde $T = (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n)$ (T_i son vectores columna con n elementos), y se encuentra mediante el conjunto de relaciones siguiente

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (\lambda + a_i) &= \bar{p}_0 + \bar{p}_1 \lambda + \dots + \bar{p}_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n \\ T_n &= B_{cl}, \\ T_{n-1} &= (A_{cl} + \bar{p}_{n-1} I) B_{cl}, \\ T_{n-2} &= (A_{cl}^2 + \bar{p}_{n-1} A_{cl} + \bar{p}_{n-2} I) B_{cl}, \\ &\vdots \\ T_1 &= (A_{cl}^{n-1} + \bar{p}_{n-1} A_{cl}^{n-2} + \dots + \bar{p}_1 I) B_{cl}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde A_{cl} y B_{cl} son las matrices del sistema y de control en lazo cerrado.

Prueba. La matriz T establecida por (7) transforma el sistema (1) en

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{n-1} y_2 + a_{n-2} y_3 + \dots + a_1 y_n + \frac{\bar{u}}{\sigma}, \\ \dot{y}_2 &= a_{n-2} y_3 + \dots + a_1 y_n + \frac{\bar{u}}{\sigma}, \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= a_1 y_n + \frac{\bar{u}}{\sigma}, \\ \dot{y}_n &= \frac{\bar{u}}{\sigma}, \end{aligned} \quad (8)$$

Suponiendo que $|y_n| > 1$ se probará que el estado y_n entra en el intervalo $[-1, 1]$ en un tiempo finito t_1 . Considere la función candidata de Lyapunov $V_n = \frac{1}{2} y_n^2$

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= y_n \dot{y}_n = y_n \frac{\bar{u}}{\sigma} \\ &= -y_n a_1 \text{sat}_1(y_n) - y_n [a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) + \dots + a_n \text{sat}_1(y_1)]. \end{aligned} \quad (9)$$

El decremento de la función de Lyapunov V_n se mantiene si $a_1 > \sum_{i=2}^n a_n$, esto se asegura por (2), entonces y_n necesariamente entra en $[-1, 1]$ en un tiempo finito t_1 y permanecerá dentro para todo tiempo futuro t . El estado y_n no está saturado y se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{n-1} y_2 + a_{n-2} y_3 + \dots + a_2 y_{n-1} + \frac{a_1 y_n}{\sigma} \\ &\quad + [-\frac{a_1 y_n}{\sigma} - a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) - \dots - a_n \text{sat}_1(y_1)], \\ \dot{y}_2 &= a_{n-2} y_3 + \dots + a_2 y_{n-1} + \frac{a_1 y_n}{\sigma} \\ &\quad + [-\frac{a_1 y_n}{\sigma} - a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) - \dots - a_n \text{sat}_1(y_1)], \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= \frac{a_1 y_n}{\sigma} + [-\frac{a_1 y_n}{\sigma} - a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) - \dots - a_n \text{sat}_1(y_1)], \\ \dot{y}_n &= -a_1 y_n - a_2 \text{sat}_1(y_{n-1}) - \dots - a_n \text{sat}_1(y_1), \end{aligned} \quad (10)$$

Usando el razonamiento anterior y considerando la función de Lyapunov $V_{n-1} = \frac{1}{2} y_{n-1}^2$, el estado y_{n-1} también entrará en el intervalo $[-1, 1]$ en un tiempo finito $t_2 > t_1$. Continuando este razonamiento, después de algún tiempo, todos los estados y_i entrarán en el intervalo $[-1, 1]$ y el sistema (8) tendrá la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (11)$$

con eigenvalores $\{-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1\}$ estrictamente negativos. En consecuencia el sistema es asintóticamente estable, lo que termina la prueba. ■

II-B. Representación de orientación de un cuerpo rígido

El cuaternión q se define como (Shuster, 1993)

$$q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \hat{e} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{pmatrix} \in H \quad (12)$$

con $H = \{q \mid q_0^2 + \vec{q}^T \vec{q} = 1, q = [q_0 \ \vec{q}]^T, q_0 \in \mathbb{R}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3\}$, donde $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ y q_0 son las partes vectorial y escalar del cuaternión. En aplicaciones de control de orientación, el cuaternión unitario representa la rotación desde un sistema de coordenadas inercial $N(x_n, y_n, z_n)$, localizado en algún punto del espacio, al sistema de coordenadas $B(x_b, y_b, z_b)$ localizadas en el centro de masa del cuerpo rígido.

Denotando con $\vec{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ el vector de velocidad angular del marco de referencia en el cuerpo B relativo al marco inercial N , la ecuación cinemática está dada por

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Xi(q) \vec{\omega} \quad (13)$$

donde

$$\Xi(q) = \begin{pmatrix} -\vec{q}^T \\ I_3 q_0 + [\vec{q}^\times] \end{pmatrix}. \quad (14)$$

La matriz de rotación $R(q) \in SO(3)$ correspondiente al cuaternión q se calcula por

$$R(q) = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q}) I_3 + 2(\vec{q} \vec{q}^T - q_0 [\vec{q}^\times]), \quad (15)$$

donde I_3 es la matriz identidad y $[\vec{q}^\times]$ es el tensor antisimétrico asociado con el vector axial \vec{q} dado por

$$[\vec{q}^\times] = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}^\times = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

El error de orientación es usada para medir la diferencia entre dos orientaciones. Si q define el cuaternión de orientación actual y q_d es el cuaternión de referencia, es decir la orientación deseada, entonces el cuaternión de error que representa el error de orientación entre la orientación actual y la deseada está dada por

$$q_e = q \otimes q_d^{-1} \quad (17)$$

donde \otimes denota la multiplicación entre cuaterniones y q^{-1} es la rotación complementaria del cuaternión q el cual es el cuaternión conjugado.

Una de las representaciones de la orientación más utilizadas en aeronáutica son los ángulos de Cardán (alabeo, cabeceo y guiñada): (ϕ, θ, ψ) . La matriz de rotación en función de estos ángulos está dada por

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} C\psi C\theta & S\psi C\theta & -S\theta \\ C\psi S\theta S\phi - S\psi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\psi C\theta & C\theta S\phi \\ C\psi C\theta S\phi + S\psi S\theta & S\theta S\psi C\phi - C\psi S\theta & C\theta C\phi \end{pmatrix}, \quad (18)$$

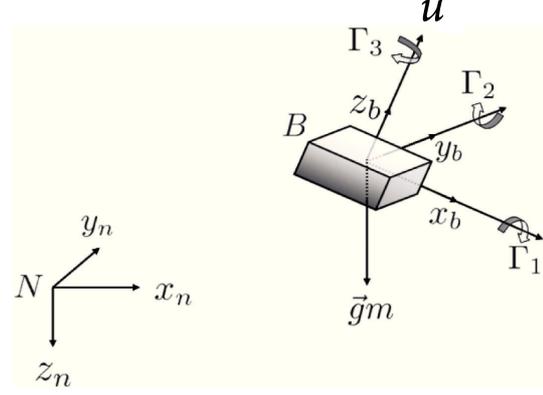


Figura 1. Configuración esquemática de un vehículo VTOL.

con $S(\cdot) = \text{sen}(\cdot)$ y $C(\cdot) = \text{cos}(\cdot)$, que es equivalente a (15).

III. MODELO MATEMÁTICO DE LOS VEHÍCULOS AÉREOS VTOL

Una representación esquemática de los vehículos tipo VTOL se muestra en la Figura 1, aquí se pueden apreciar el marco de referencia inercial $N(x_n, y_n, z_n)$, el marco de referencia fijo al cuerpo $B(x_b, y_b, z_b)$, la fuerza u en la dirección de z_b , que aquí hará la función de control de traslación y los torques Γ_1, Γ_2 y Γ_3 alrededor de los ejes principales del cuerpo y hacen posible el control de orientación. Finalmente el vector de peso $m\vec{g}$.

La dinámica de movimiento de los sistemas tipo VTOL se obtienen por el formalismo Newton-Euler y la cinemática de la orientación utilizando el formalismo de cuaterniones. El modelo completo del sistema es dado por

$$\Sigma_T := \begin{cases} \dot{\vec{p}} = \vec{v}, \\ m\dot{\vec{v}} = -m\vec{g} + R(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (19)$$

$$\Sigma_O := \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2} \Xi(q) \vec{\omega}, \\ J\dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma_{(1,2,3)}, \end{cases} \quad (20)$$

donde \vec{p} y \vec{v} son los vectores de posición y velocidad lineales, m es la masa del vehículo, \vec{g} la aceleración de caída libre, $R(\phi, \theta, \psi)$ es la matriz de rotación, en función de los ángulos de Cardán, que expresa al vector de fuerzas en el sistema de referencia inercial y está dada en (18). q y $\vec{\omega}$ son el cuaternión y la velocidad angular respectivamente, J es la matriz de inercia del vehículo. u es la fuerza en la dirección z_b , en este caso juega el papel de control de traslación. $\Gamma_{(1,2,3)}$ son los torques de control de orientación. Estos últimos y u representan las cuatro entradas de control del sistema.

IV. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema consiste en diseñar una ley de control que bajo la configuración “lazo interno-lazo externo” (inner-outer loop) y teniendo resuelto el problema del control de orientación, logre estabilizar en la posición de coordenadas $(0, 0, 0)$ a un vehículo aéreo tipo VTOL. En otras palabras, se trata de encontrar una ley de control que, una vez estabilizada la orientación del vehículo, esto es: $\lim_{t \rightarrow \infty} (R, \vec{\omega}) = (R_d, \vec{0})$, sea capaz de estabilizar la posición de la aeronave al origen del marco de referencia, es decir: $\lim_{t \rightarrow \infty} (\vec{p}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{0})$ y adicionalmente pueda mantenerlo en esa posición aun bajo la acción de perturbaciones del medio ambiente.

V. CONTROL DE ORIENTACIÓN Y POSICIÓN

Considere las Ecuaciones (19) y (20), este sistema pertenece a los sistemas en cascada, expresados en forma general como en (Isidori, 1999), donde la dinámica traslacional (Ecuaciones (19)), depende de la rotacional (Ecuaciones (20)) pero la dinámica rotacional no depende de la traslacional. Esta propiedad se explotará para diseñar la ley de control.

V-A. Control de orientación

Para resolver el problema del control de orientación del vehículo se considera la siguiente combinación de resultados presentados en (Guerrero et al., 2008) y la parte referente a la suma de un torque deseado propuesta en (Cordova et al., 2008), con el fin de tener en cuenta las velocidades angulares deseadas en el movimiento rotacional del vehículo, entonces se tiene

Proposición 1: Considere la dinámica rotacional de los vehículos VTOL descrita por las Ecuaciones (20) con las siguientes entradas de control $\vec{\Gamma} = (\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3)^T$ tales que

$$\Gamma_j = -\text{sat}_{\bar{\Gamma}_j} \left(\frac{\kappa \omega_{e_j}}{\rho_j} + \text{sign}(q_{e_0}) \kappa q_{e_j} \right) + \Gamma_d, \quad (21)$$

donde $j \in \{1, 2, 3\}$ con $\text{sat}_{\bar{\Gamma}_j}$ funciones de saturación definidas en (5). $\bar{\Gamma}_j$ representa las cotas físicas del torque Γ_j , κ es un parámetro real tal que $0 < \kappa < \min_j \bar{\Gamma}_j / 2$. ρ_j son parámetros reales estrictamente positivos. ω_e y q_e representan el error de velocidad angular y orientación entre la velocidad angular actual y la deseada y entre la orientación actual y la deseada, respectivamente. El término Γ_d tiene la siguiente forma

$$\Gamma_d = J \dot{\vec{\omega}}_d + \vec{\omega}_d \times J \vec{\omega}_d, \quad (22)$$

donde J es la matriz de inercia del vehículo y $\vec{\omega}_d$ se calcula a partir de

$$\begin{pmatrix} \omega_{x_d} \\ \omega_{y_d} \\ \omega_{z_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & \text{cos}\theta \text{sen}\phi \\ 0 & -\text{sen}\phi & \text{cos}\theta \text{cos}\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\theta}_d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

con $\dot{\phi}_d$ y $\dot{\theta}_d$ la derivada de los ángulos deseados ϕ_d y θ_d definidos más adelante en el control de traslación.

Entonces las entradas (21) estabilizan global y asintóticamente el vehículo al origen ($q_0 = \pm 1$, $\vec{q} = \vec{q}_d$ y $\vec{\omega} = \vec{\omega}_d$).

Demostración. La demostración se lleva a cabo mediante el mismo razonamiento de la prueba presentada en (Guerrero et al., 2008), utilizando una función de Lyapunov de la forma

$$V = \frac{1}{2} \vec{\omega}_e^T J \vec{\omega}_e, \quad (24)$$

con $\vec{\omega}_e = \vec{\omega} - \vec{\omega}_d$.

V-B. Diseño del control de posición

Las Ecuaciones (19) describen el movimiento de traslación de los vehículos tipo VTOL y será usada para diseñar la ley de control de posición. El modelo (19) se lleva a una forma mas sencilla de trabajar, así una representación en componentes vectoriales tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u}{m} \text{sen}\theta \\ \frac{u}{m} \text{sen}\phi \text{cos}\theta \\ \frac{u}{m} \text{cos}\phi \text{cos}\theta - g \end{pmatrix}, \quad (26)$$

este último sistema se puede llevar a una forma adecuada para describir el movimiento en cada una de las coordenadas, con lo que se obtienen 3 dobles integradores de la forma

$$\Sigma_x \begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 \\ \dot{p}_2 = -\frac{u}{m} \text{sen}\theta \end{cases} \quad (27)$$

$$\Sigma_y \begin{cases} \dot{p}_3 = p_4 \\ \dot{p}_4 = \frac{u}{m} \text{sen}\phi \text{cos}\theta \end{cases} \quad (28)$$

$$\Sigma_z \begin{cases} \dot{p}_5 = p_6 \\ \dot{p}_6 = \frac{u}{m} \text{cos}\phi \text{cos}\theta - g \end{cases} \quad (29)$$

donde $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = (p_x, v_x, p_y, v_y, p_z, v_z)$ es el estado del subsistema que representa la dinámica de traslación. Entonces ϕ y θ serán considerados controles virtuales (Olfati-Saber, 2001), (Zavala et al., 2003), que en conjunto con u controlarán los subsistemas (27)-(29). En principio, suponga que existe un control que lleva a ϕ y θ a ángulos deseados dados por

$$\begin{aligned} \phi_d &:= \arctan \left(\frac{r_2}{r_3 + g} \right), \\ \theta_d &:= \arcsen \left(\frac{-r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 + g)^2}} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

donde r_1 , r_2 y r_3 se definirán posteriormente. Note que para ϕ_d y θ_d representados en (30), se cumple que

$$\begin{aligned} \text{sen } \phi_d &= \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + (r_3 + g)^2}}, \\ \text{cos } \phi_d &= \frac{r_3 + g}{\sqrt{r_2^2 + (r_3 + g)^2}}, \\ \text{sen } \theta_d &= \frac{-r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 + g)^2}}, \\ \text{cos } \theta_d &= \frac{\sqrt{r_2^2 + (r_3 + g)^2}}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 + g)^2}}, \end{aligned} \quad (31)$$

de esta manera, la entrada de control

$$u = m\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + (r_3 + g)^2}, \quad (32)$$

con $\phi = \phi_d$ y $\theta = \theta_d$, transforma los subsistemas (27)-(29) en

$$\Sigma_x \begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 \\ \dot{p}_2 = r_1 \end{cases} \quad (33)$$

$$\Sigma_y \begin{cases} \dot{p}_3 = p_4 \\ \dot{p}_4 = r_2 \end{cases} \quad (34)$$

$$\Sigma_z \begin{cases} \dot{p}_5 = p_6 \\ \dot{p}_6 = r_3 \end{cases} \quad (35)$$

Los ángulos ϕ_d y θ_d serán alcanzados por el sistema utilizando la ley de control de la Proposición 1. Note que u será siempre positiva, además deberá cumplirse que $u \geq mg$, a fin de compensar el peso de la aeronave.

V-B.1. Control de posición: Puesto que las cadenas de integradores (33), (34) y (35) tienen la misma forma, se puede proponer un control para cada una de ellas de la forma mostrada en (3), la propuesta de ley de control se puede establecer en el siguiente lema:

Lema 1: Considere la dinámica del sistema expresado por las Ecuaciones (33)-(35), y considere las leyes de control con entradas acotadas

$$\begin{aligned} r_1 &:= -\sigma_1 \left\{ a_2 \text{sat}_{M_1} \left[\frac{1}{\sigma_1} (a_1 p_1 + p_2) \right] + a_1 \text{sat}_{M_1} \left[\frac{1}{\sigma_1} (p_2) \right] \right\}, \\ r_2 &:= -\sigma_2 \left\{ b_2 \text{sat}_{M_1} \left[\frac{1}{\sigma_2} (b_1 p_3 + p_4) \right] + b_1 \text{sat}_{M_1} \left[\frac{1}{\sigma_2} (p_4) \right] \right\}, \\ r_3 &:= -\sigma_3 \left\{ c_2 \text{sat}_{M_1} \left[\frac{1}{\sigma_3} (c_1 p_5 + p_6) \right] + c_1 \text{sat}_{M_1} \left[\frac{1}{\sigma_3} (p_6) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

donde $\text{sat}_{M_1}(\cdot)$ está definida en (5), con $M_1 = 1$. $b_{(1,2)}, c_{(1,2)} > 0$ son parámetros de sintonización definidos como en la Ecuación (2) y los σ_i dados por

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \bar{r}_1 / (a_1 + a_2), \\ \sigma_2 &= \bar{r}_2 / (b_1 + b_2), \\ \sigma_3 &= \bar{r}_3 / (c_1 + c_2), \end{aligned} \quad (37)$$

Entonces las leyes de control (36) estabilizan exponencialmente a los sistemas (33)-(35) a los puntos de origen $(p_1, p_2) = (0, 0)$, $(p_3, p_4) = (0, 0)$ y $(p_5, p_6) = (0, 0)$.

La prueba del Teorema (1) también aplica en estos casos. Un esquema gráfico completo del sistema y el control acoplado se muestra en la Figura 2.

VI. RESULTADOS

Para probar la efectividad de las leyes de control implementadas para los sistemas VTOL, se hicieron distintas pruebas en simulación para el caso específico de una mini nave aérea de cuatro rotores conocida como Quadrotor, utilizando el software herramienta MATLAB/Simulink. Los valores de los parámetros del modelo utilizado en la simulación son: $m = 400gr$, $\max|\Gamma_{1,2}| = 2,02N \cdot m$,

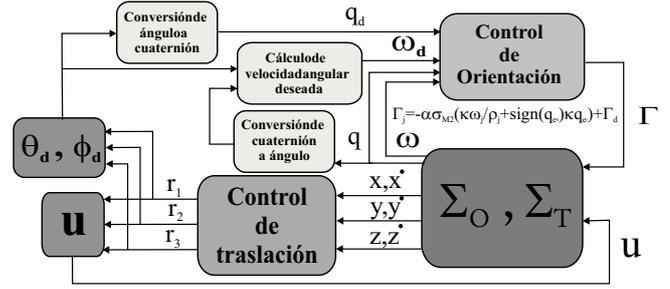


Figura 2. Esquema completo del sistema y el control.

$\max|\Gamma_3| = 0,75N \cdot m$, $\max|u| = 7N$. Además se usaron los valores $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \bar{r}_3 = 4$, $a_1 = b_1 = c_1 = 2,5$ y $a_2 = b_2 = c_2 = 2,4$.

El escenario simulado representa una situación física en la cual el Quadrotor ha sido perturbado por una corriente de aire que lo ha puesto en las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \phi(t_0) &= -25^\circ, & \theta(t_0) &= 30^\circ, & \psi(t_0) &= -10^\circ, \\ \omega_1(t_0) &= 55 \frac{rad}{s}, & \omega_2(t_0) &= -30 \frac{rad}{s}, & \omega_3(t_0) &= 8 \frac{rad}{s}, \\ p_x(t_0) &= 3 m, & p_y(t_0) &= -5 m, & p_z(t_0) &= 4 m, \\ v_x(t_0) &= 5 \frac{m}{s}, & v_y(t_0) &= 7 \frac{m}{s}, & v_z(t_0) &= -4 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Las gráficas en la Figura 3 muestran la fuerza de sustentación y control de traslación u , los torques de control $\Gamma_{1,2,3}$ aplicados para estabilizar la aeronave y luego orientarla de tal forma que alcance la posición del origen de coordenadas, y finalmente los valores de los ángulos de Cardán. Se debe mencionar que, aunque la simulación del movimiento se realiza utilizando el cuaternión, aquí se muestran los ángulos de Cardán para tener una mejor comprensión del fenómeno. La Figura 4 muestra el comportamiento del vehículo en su movimiento de traslación en cada uno de los ejes de coordenadas así como la evolución de las velocidades del vehículo. Se puede observar que el control cumple su función de estabilizar al sistema en el origen de coordenadas.

VII. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

La ley de control propuesta para la traslación de vehículos aéreos tipo VTOL, acoplado a una ley de control de orientación efectiva, muestra un buen desempeño en simulación, tomando en cuenta que ambas son no lineales. Se han usado funciones de saturación con el fin de tomar en cuenta los límites aceptables en las señales de entrada del sistema simulado. En conjunto se tiene una ley de control simple la cual puede ser implementada en sistemas empotrados, donde la capacidad de cálculo es reducida. Aunque la prueba de convergencia de cada una de las leyes de control se realiza en el sentido de Lyapunov, aun queda probar la estabilidad del sistema completo.

VIII. AGRADECIMIENTOS

Parte del estudio presentado en este artículo fue financiado por el CONACYT a través de la beca de estudios de doctorado 33918 con número de registro 202049.

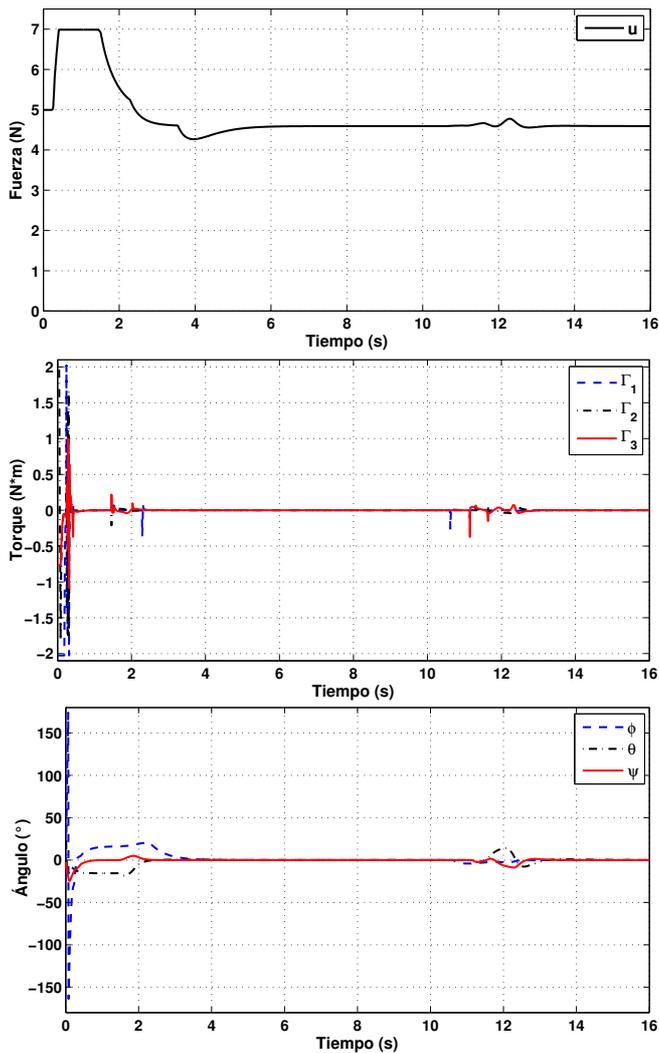


Figura 3. Resultados del control u , los torques de control y los ángulos de Cardán.

REFERENCIAS

Castillo P., A. Dzul y R. Lozano (2004). Real-time stabilization and tracking of a four rotor mini rotorcraft. *IEEE transactions on Control Systems Technology*. **12**(4), 510–516.

Córdova-Alarcón J. R., E. Vicente-Vivas y H. Rodríguez-Cortés (2008). Nonlinear attitude control for a Picosatellite driven by reaction wheels. *Research in Computing Science*. **36**, 661–670.

Dierks T. y S. Jagannathan (2010). Output feedback control of a quadrotor UAV using neural network. *IEEE Transactions on neural networks*. **21**(1), 50–66.

Fernando T., J. Chandiramani, T. Lee y H. Gutierrez (2011). Robust adaptive geometric tracking control on $SO(3)$ with an application to the attitude dynamics of a quadrotor UAV. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*. Orlando, FL., USA. 7380–7385.

Guerrero-Castellanos J. F., N. Marchand, A. Hably, S. Lesecq y J. Delamare (2011). Bounded attitude control of rigid bodies: Real-time experimentation to a quadrotor mini helicopter. *Control Engineering Practice*. **19**, 790–797.

Guerrero-Castellanos J. F., N. Marchand, S. Lesecq y J. Delamare (2008). Bounded attitude stabilization: Real-time Application on four-rotor mini- helicopter. *En 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea*.

Hably, A. y N. Marchand (2007). Global stabilization of a four rotor

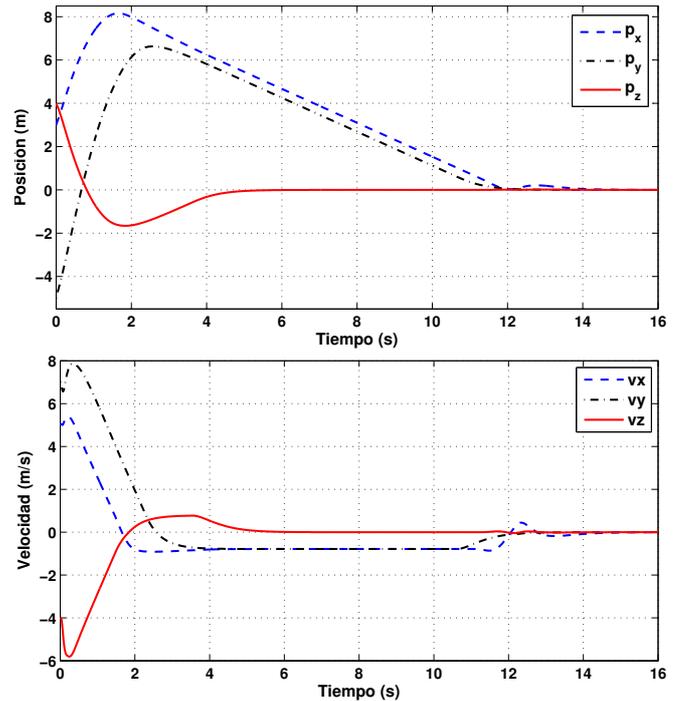


Figura 4. Resultados de la posición, y la velocidad.

helicopter with bounded inputs. *IEEE International conference on Intelligent Robots and Systems. San Diego, California*.

Isidori. A. (1999). *Nonlinear Control Systems II*. Springer-Verlag. London Limited.

Marchand N. y A. Hably (2005). Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica*. **41**(12), 2147–2152.

Olfati-Saber R. (2001). Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles. *PhD. Tesis Report. MIT, USA*.

Pounds P. y R. E. Mahony (2009). Design principles of large quadrotors for practical applications. *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA, Kobe, Japan*.

Salazar S., H. Romero, R. Lozano y P. Castillo (2009). Modeling and Real-Time Stabilization of an Aircraft Having Eight Rotors. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. **54**, 455–470.

Shuster M. D. (1993). A survey of attitude representations. *Journal of the Astronautical Sciences*. **41**(4), 439–517.

Sussmann. H. J., E. D. Sontag y Y. Yang (1994). A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **39**(12), 2411–2425.

Teel. A. R. (1992). Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & Control Letters*. **18**(3), 165–171.

Zamudio Z., R. Lozano, J. Torres y J. L. Rullan-Lara (2011). Vision based stabilization of a quadrotor using nested saturation control approach. *15th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*

Zavala A., I. Fantoni y R. Lozano (2003). Global stabilization of a PVTOL aircraft model with bounded inputs. *International Journal of Control*. **76**(18), 1833–1844.